

文章编号: 1000-8055(2007)06-0909-06

航空发动机 ZP/LTR 方法稳定性分析及改进

杨 刚, 姚 华

(中国航空动力控制系统研究所, 无锡 214063)

摘 要: 分析了零点配置/回路传函恢复 (ZP/LTR) 方法稳定性, 给出并证明了其稳定性条件. 但该条件较为苛刻, 限制了 ZP/LTR 方法的应用. 为了对 ZP/LTR 方法改进, 在设计过程中引入了 Kalman 滤波器, 通过选取特殊的参数, 使 Kalman 滤波器回路逼近并取代原目标回路, 从而在保留 ZP/LTR 方法性能的同时, 通过保证 Kalman 滤波器回路的稳定性保证了最后闭环系统的稳定性. 给出并证明了改进后的 ZP/LTR 方法的稳定性条件, 指出改进后的 ZP/LTR 方法的稳定性条件较为宽松, 拓宽了原 ZP/LTR 方法的应用范围.

关 键 词: 航空、航天推进系统; 航空发动机控制; 零点配置/回路传函恢复 (ZP/LTR); 线性二次型高斯/回路传函恢复 (LQG/LTR); Kalman 滤波器; 稳定性

中图分类号: V233.7

文献标识码: A

Stability analysis and improvement of ZP/LTR method of aeroengine

YANG Gang, YAO Hua

(Aviation Motor Control System Institute, Wuxi 214063, China)

Abstract: Zero placement/loop transfer recovery (ZP/LTR) method was analyzed theoretically to find and demonstrate the conditions of stability. However, these strict conditions have placed constraint on the application of ZP/LTR method. Kalman filter was thus introduced for the purpose of improvement of ZP/LTR method. With some special parameters selected, Kalman filter loop could approximate and replace original target feedback loop (TFL). While the performance of ZP/LTR method is maintained, the stability of final closed-loop system could be guaranteed along with the stability of Kalman filter loop. The stability conditions of improved ZP/LTR method was presented and demonstrated, showing that the stability conditions of improved ZP/LTR method were less strict, thus expanding the scope of applications for original ZP/LTR method.

Key words: aerospace propulsion system; aeroengine control; zero placement/loop transfer recovery (ZP/LTR); linear quadratic Gaussian with loop transfer recovery (LQG/LTR); Kalman filter; stability

随着控制变量的增多, 航空发动机已由单变量对象发展为多变量对象, 其控制相应地应采用多变量控制方法^[1]. 同时由于航空发动机又是一种非常复杂的对象, 其参数变化范围大, 非线性

强, 且建模误差难以避免, 因此其控制必须采用鲁棒控制方法, 以保证发动机控制系统在存在一定的建模误差的条件下仍能保持良好的稳定性以及动态性能.

收稿日期: 2006-05-17; 修订日期: 2006-09-25

基金项目: 航空科学基金(05C14001)

作者简介: 杨刚(1976-), 男, 湖南辰溪人, 博士后, 研究领域为航空发动机建模与控制、多变量鲁棒控制. Email: yg_203.student@sina.com

线性二次型高斯/回路传函恢复(LQG/LTR)方法^[2-3]是一种解决多变量鲁棒反馈系统设计的简单且有效的方法,但在将LQG/LTR方法应用于最小相位对象时,目标反馈回路的中频段性能往往不够理想,为此,文献[4~6]提出了零点配置/回路传函恢复(ZP/LTR)方法,改善了目标回路在中频段的性能,但已有文献没有给出该方法的稳定性条件,这就限制了这种方法的应用。

本文从理论上对ZP/LTR方法的稳定性进行了分析,找到了该方法的稳定性条件,并给出了证明。此外,本文对ZP/LTR方法的设计步骤进行了改进,采用Kalman滤波器回路逼近ZP/LTR方法中的目标回路,并证明了这种情况下闭环系统的稳定性条件,指出改进后的ZP/LTR方法可以扩大其应用范围。

1 ZP/LTR方法

设航空发动机状态空间表示的线性模型为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (1)$$

其中, x, u, y 分别属于 $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m$, 且 n 为系统维数, m 为输入/输出维数, A, B, C, D 为适维矩阵, 且 (A, B, C) 可控可观。对该模型增广, 可得设计对象模型 $G(s)$ 为

$$\begin{cases} \dot{x}_g = A_g x_g + B_g u_g \\ y_g = C_g x_g \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$A_g = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_g = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, C_g = [C \quad D] \quad (3)$$

$x_g = [x^T \quad u^T]^T$, u_g 为积分器前的控制信号。

根据ZP/LTR方法设计状态观测器形式的目标反馈回路, 其开环传函为

$$G_{KZ}(s) = C_g(sI - A_g)^{-1} K_c \quad (4)$$

若要求各控制回路的带宽分别为 $w_i (i = 1, 2, \dots, m)$, 令

$$W = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_m) \quad (5)$$

采用零点配置方法设计 K_c

$$K_c = G^+ N \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} G &= C_g [R_1^T \quad R_2^T \quad R_{n+m}^T]^T \\ N &= [I \quad a_1 I \quad a_n I \quad 0 \quad 0]^T W \\ R_1 &= I \end{aligned}$$

$$R_2 = A_g R_1 + a_1 I$$

...

$$R_{n+1} = A_g R_n + a_n I$$

$$R_{n+2} = A R_{n+1}$$

$$R_{n+m} = A R_{n+m-1}$$

其中 $[\cdot]^+$ 表示 $[\cdot]$ 的广义逆, $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为 A 的特征多项式系数, 即

$$\det(sI - A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n \quad (7)$$

同时, 记 $R_i (i = 1, 2, \dots, n+m)$ 为 A_g 的 R 系数。

利用上述目标反馈回路, 按LTR的一般步骤可得ZP/LTR补偿器

$$G_{LTR}(s) = K_c(sI - A_g + B_g K_c + K_c C_g)^{-1} K_c \quad (8)$$

其中

$$K_c = B_g^T P$$

$P = P^T > 0$, 满足如下Riccati方程

$$P A_g + A_g^T P + Q C_g^T C_g - P B_g B_g^T P = 0$$

Q 为恢复系数。

对最小相位系统而言, 补偿器 $G_{LTR}(s)$ 具有如下恢复特性

$$\lim_{q \rightarrow \infty} G(s) G_{LTR}(s) = C_g(sI - A_g)^{-1} K_c = G_{KZ}(s) \quad (9)$$

即由ZP/LTR补偿器与设计对象模型构成的控制系统的开环传递函数渐近收敛于目标反馈回路的开环传递函数, 换言之, 目标反馈回路的特性得到恢复。

2 ZP/LTR方法稳定性分析

由ZP/LTR方法设计过程可见, 由方程(6)得出的目标反馈回路增益矩阵 K_c 直接应用于LTR过程, 由分离定理知, 闭环系统的稳定性将与回路 $G_{KZ}(s)$ 的稳定性相同。因此, 接下来分析回路 $G_{KZ}(s)$ 的稳定性。

定理1: 若 A_g, C_g 如式(3)所示, 且 A 无虚轴上极点, 则当 C_{g2} (定义见证明过程) 行满秩时, 回路 $G_{KZ}(s)$ 稳定等价于矩阵 A 稳定。

证明: A 无虚轴上极点

$\rightarrow A_g$ 有 n 个不为0的极点;

同时, 由 A_g 结构可知, A_g 有 m 个原点处极点, 故 A_g 的Jordan标准型为

$$A_g = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}$$

其中 $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $T \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ 为可逆矩阵。

易证, 矩阵 A_g 与 $\text{diag}(J, 0)$ 的特征多项式系

数相等,且它们的 R 系数之间存在如下关系

$$R_i|_{A_g} = TR_i|_{[J_0]T^{-1}}, (i = 1, \dots, n+m)$$

记 $R_i|_{A_g}$ 为 R_i , $R_i|_{[J_0]}$ 为 R'_i , 则根据附录引理可得如下关系

$$K_e = G^+ N = T \begin{bmatrix} 0 \\ C_{g2}^+ \end{bmatrix} W$$

其中 $[C_{g1} \ C_{g2}] = C_g T$, $C_{g1} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C_{g2} \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

故回路 $G_{KZ}(s)$ 的闭环系统矩阵可写为

$$A_{gc} = A_g - K_e C_g = T \begin{bmatrix} J & 0 \\ -C_{g2}^+ W C_{g1} & -C_{g2}^+ W C_{g2} \end{bmatrix} T^{-1}$$

进一步可得

$$\lambda(A_{gc}) = \begin{bmatrix} \lambda(J) \\ \lambda(-C_{g2}^+ W C_{g2}) \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda(\cdot)$ 表示 $(\cdot)$ 的特征值系统. 因为

C_{g2} 行满秩

$$\Leftrightarrow C_{g2} \text{ 可逆, 即 } C_{g2}^+ = C_{g2}^{-1}$$

故

$$\lambda(-C_{g2}^+ W C_{g2}) = \lambda(-W) = -\lambda(W)$$

由式(5)知, W 为对角矩阵, 且对角元均非负, 即

$-C_{g2}^+ W C_{g2}$ 没有非稳定极点. 故

$$\begin{aligned} A_{gc} & \text{ 稳定} \\ \Leftrightarrow J & \text{ 稳定} \\ \Leftrightarrow A & \text{ 稳定} \end{aligned}$$

证毕.

由定理 1 可知, 如果开环系统稳定, 即 A 稳定, 则 ZP/LTR 方法设计的目标反馈回路 $G_{KZ}(s)$ 稳定, 也可以保证 ZP/LTR 控制器的闭环稳定性; 但当开环不稳定时, 则这种方法设计出的控制器一定无法稳定控制被控对象.

3 ZP/LTR 方法的改进

在参考文献[2]中, Athans M 首先提出目标回路 $G_{FOL}(s)$, 之后再设计 Kalman 滤波器逼近此回路, 并将 Kalman 滤波器回路 $G_{KF}(s)$ 用至最后的 LTR 过程, 从而利用 Kalman 滤波器回路的稳定性来保证最后闭环系统的稳定性. 在 ZP/LTR 方法中, 如果利用同样的思路来设计控制器, 则即使定理 1 的开环稳定条件无法满足, 所设计的控制器仍能保证最后闭环系统的稳定性.

考虑如下 Kalman 滤波器问题

$$\begin{cases} \dot{x} = A_g x + L \xi \\ y = C_g x + \mu \theta \end{cases} \quad (10)$$

其中 A_g, C_g 与系统(2)相同, ξ, θ 为零均值白噪声, 且 $E(\xi^T \xi) = E(\theta^T \theta) = I$, L 为适维矩阵, $\mu > 0$ 为一常数. 对系统(10)求解 Kalman 滤波器问题可得增益矩阵 K_f

$$K_f = (1/\mu) \Sigma C_g^T \quad (11)$$

其中 $\Sigma = \Sigma^T \geq 0$, 满足如下 Riccati 方程

$$A_g \Sigma + \Sigma A_g^T + L L^T - (1/\mu) \Sigma C_g^T C_g \Sigma = 0$$

则 Kalman 滤波器回路开环传函 $G_{KF}(s)$ 为

$$G_{KF} = C_g (sI - A_g)^{-1} K_f \quad (12)$$

当 $\sigma[G_{KF}] \gg 1$ 时, 由 Kalman 等式[3]知

$$\sigma[G_{KF}] \approx \sigma[G_{FOL}]$$

其中

$$G_{FOL} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} C_g (sI - A_g)^{-1} L$$

此处, $\sigma[\cdot]$ 表示 $[\cdot]$ 的第 i 个奇异值, $\sigma[\cdot]$ 表示最小奇异值.

因此, 若取 $\mu = 1, L = K_e$, 则当 $\sigma[G_{KF}] \gg 1$ 时

$$G_{KF}(s) \approx G_{FOL}(s) = G_{KZ}(s)$$

即 ZP/LTR 方法的目标反馈回路开环特性 $G_{KZ}(s)$ 可由 Kalman 滤波器回路开环传函 $G_{KF}(s)$ 逼近.

如果用 Kalman 滤波器增益矩阵 K_f 完成 LTR 过程, 则由分离定理知, 最终的闭环系统的稳定性将与此 Kalman 滤波器回路相同.

定理 2: 系统(10)中, 若 A 无虚轴上极点, (A_g, C_g) 可观, $\mu > 0$, 且为常数, $L = K_e$, 则一般而言, Kalman 滤波器回路稳定.

证明: 由附录引理知, (A_g, K_e) 虚轴上极点一般可控, 又 (A_g, C_g) 可观, 则 Riccati 方程:

$$A_g \Sigma + \Sigma A_g^T + K_e K_e^T - (1/\mu) \Sigma C_g^T C_g \Sigma = 0$$

存在唯一非负定解: $\Sigma = \Sigma^T \geq 0$, 使

$$(A_g - (1/\mu) \Sigma C_g^T C_g) \text{ 稳定}$$

即 Kalman 滤波器回路稳定.

证毕.

注: 定理 2 成立的前提是附录引理中列满秩条件成立, 但定理证明过程没有验证该引理, 因此本定理的结论为“一般情况下成立”. 但实际设计过程中, 该列满秩条件易由具体矩阵数值通过计算验证.

定理 2 表明, 当 $L = K_e$ 时, 在有关条件成立的情况下, 可以不考虑被控对象开环是否稳定而直接应用改进的 ZP/LTR 方法, 最终闭环系统的稳定性可由 Kalman 滤波器回路的稳定性得到保证.

4 设计实例

4.1 例 1

以某型双转子涡扇发动机主控制系统设计为例. 在中间状态时, 本发动机采用双变量控制, 用主燃油流量 (W_f) 和喷口喉道面积 (A_8) 控制高压转子转速 (n_2) 和涡轮落压比 (π_T) 为给定数值.

首先, 将发动机的非线性模型在中间状态线性化, 得到以状态空间 (A, B, C, D) 描述的小偏差线性化模型, 如式 (1) 所示, 其中, $x = [n_1, n_2]^T$, $u = [W_f, A_8]^T$, $y = [n_2, \pi_T]^T$, 式中 n_1 为发动机低压转子转速. 可得系统极点如表 1 第 1 列所示. 显然, 开环系统没有右半平面 (RHP) 极点, 开环系统稳定, 因此, 由定理 1 及定理 2 知, 该系统用 ZP/L TR 方法及改进的 ZP/L TR 方法均可设计出稳定控制器.

表 1 例 1 原系统及闭环系统极点

Table 1 Poles of original and closed loop system of Example 1

原系统	ZP/L TR	改进 ZP/L TR
- 10.7	- 188.2 + 188.0i	- 188.2 + 188.0i
- 10	- 188.2 - 188.0i	- 188.2 - 188.0i
- 3.3	- 36.9	- 36.9
- 3.2	- 18.5 + 31.9i	- 18.5 + 31.9i
	- 18.5 - 31.9i	- 18.5 - 31.9i
	- 15	- 15
	- 10.7	- 10.7
	- 10.1	- 10.1
	- 10	- 10
	- 3.3	- 3.3
	- 3.2	- 3.2
	- 2	- 2

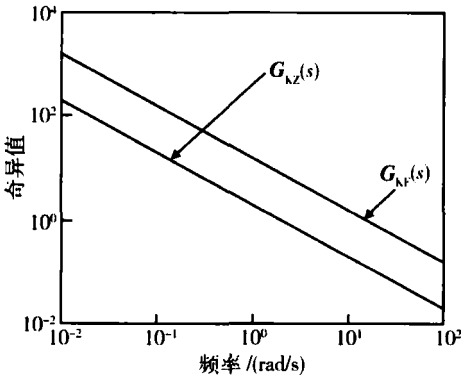


图 1 例 1 中 $G_{KZ}(s)$ 及 $G_{KF}(s)$ 奇异值曲线
Fig. 1 Singular value plot of $G_{KZ}(s)$ and $G_{KF}(s)$ of example 1

对该系统按如系统 (2) 所示方式增广后, 按 ZP/L TR 方法可求得目标反馈回路 $G_{KZ}(s)$, 其奇异值曲线如图 1 中实线所示, 可见在整个频域范围内目标回路具有良好的性能. 再按 ZP/L TR 方法步骤完成控制器设计, 可求出最终闭环系统, 其极点如表 1 第 2 列所示, 可见闭环系统也没有 RHP 极点, 闭环系统稳定. 如果按改进的 ZP/L TR 方法设计控制器, 则在求出 $G_{KZ}(s)$ 后还需求出 $G_{KF}(s)$, 其奇异值曲线如图 1 中虚线所示. 由图可见, $G_{KZ}(s)$ 与 $G_{KF}(s)$ 的奇异值曲线完全重合, 虚线被实线完全遮盖, 这说明了当原系统稳定时, $G_{KF}(s)$ 对 $G_{KZ}(s)$ 的逼近程度. 再按 L TR 步骤完成改进的 ZP/L TR 控制器设计, 并求出最终闭环系统的极点如表 1 第 3 列所示. 显然, 此时求出的极点与之前 ZP/L TR 方法求出的一致, 这说明当按 ZP/L TR 方法求出的控制系统闭环稳定时, 改进的 ZP/L TR 方法将会得出与之一致的结果.

例 1 讨论了当被控对象开环稳定时的情况, 设计表明, 对这种情况, ZP/L TR 方法及改进的 ZP/L TR 方法给出了完全相同的结果.

4.2 例 2

例 2 实际为例 1 的扰动形式. 系统仍如式 (1) 所示, 但对 A 矩阵进行了扰动, 即: $a'_{44} = -a_{44}$, 而其它元素及其它矩阵均与例 1 相同. 此时, 该系统已不再表示发动机了, 而仅仅只能理解为一个设计实例. 系统极点如表 2 中第 1 列所示, 显然, 开环系统有一个 RHP 极点, 开环系统不稳定. 由定理 1, 若应用 ZP/L TR 方法为该对象设计控制器, 则最终的闭环系统不会稳定; 而由定理 2, 若应用改进的 ZP/L TR 方法设计控制器, 则最终的闭环

表 2 例 2 原系统及闭环系统极点

Table 2 Poles of original and closed loop system of Example 1

原系统	ZP/L TR	改进 ZP/L TR
- 10.7	- 188.2 + 188.0i	- 188.2 + 188.0i
- 10	- 188.2 - 188.0i	- 188.2 - 188.0i
- 3.2	- 36.9	- 36.9
3.3	- 18.5 + 31.9i	- 18.5 + 31.9i
	- 18.5 - 31.9i	- 18.5 - 31.9i
	- 15	- 15
	- 10.7	- 10.7
	- 10.1	- 10.1
	- 10	- 10
	- 3.2	- 3.3
	- 2	- 3.2
	3.3	- 2

系统仍然会是稳定的。

与前类似,增广后按 ZP/LTR 方法可求得目标反馈回路 $G_{KZ}(s)$,其奇异值曲线如图 2 中实线所示。显然,奇异值曲线与图 1 中类似,但此时目标回路却不再稳定。再按 ZP/LTR 方法步骤完成控制器设计,可求出最终闭环系统,其极点如表 2 第 2 列所示。显然,闭环系统也有一个 RHP 极点,闭环系统不稳定。

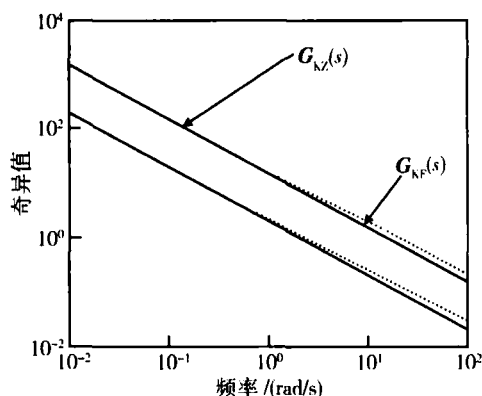


图 2 例 2 中 $G_{KZ}(s)$ 及 $G_{KF}(s)$ 奇异值曲线

Fig. 2 Singular value plot of $G_{KZ}(s)$ and $G_{KF}(s)$ of example 2

再按改进的 ZP/LTR 方法设计控制器,则在求出 $G_{KZ}(s)$ 后还需求出 $G_{KF}(s)$,其奇异值曲线如图 2 中虚线所示。由图可见, $G_{KZ}(s)$ 与 $G_{KF}(s)$ 的奇异值曲线在 $\sigma[G_{KF}] \gg 1$ 时基本重合,但当此条件不满足时,曲线不再重合。经分析可知, $G_{KF}(s)$ 稳定,这与本文结论一致。接下来再按 LTR 步骤完成改进的 ZP/LTR 控制器设计,并求出最终闭环系统的极点如表 2 第 3 列所示。显然,改进的 ZP/LTR 方法求出的控制系统没有 RHP 极点,闭环稳定。

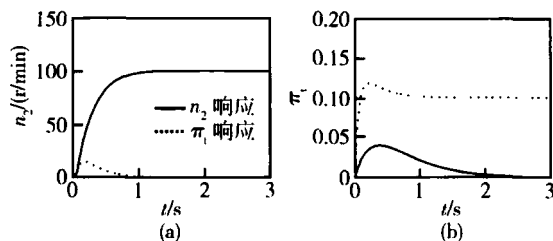


图 3 改进的 ZP/LTR 方法阶跃响应仿真

Fig. 3 Step response of improved ZP/LTR method

对改进 ZP/LTR 方法求出的系统进行阶跃响应仿真,结果如图 3 所示。其中,图 3(a) 表示 n_2 响应,图 3(b) 表示 π 响应;实线表示 n_2 阶跃时的响应,而虚线表示 π 阶跃时的响应。如,(a) 图的实线就表示对 n_2 进行阶跃时的 n_2 响应。阶跃量

均为非线性模型稳态值的 1%,因此,从无量纲的意义上讲,两个阶跃量的幅值基本相等。

由仿真结果可知,闭环系统稳定,这验证了改进的 ZP/LTR 方法求出的闭环系统的稳定性。对原 ZP/LTR 方法也可进行类似的阶跃响应仿真试验,但由于闭环系统不稳定,响应表现为发散特性,故此处省略了仿真结果。

综上所述,当设计对象模型是稳定对象时,原 ZP/LTR 方法与改进的 ZP/LTR 方法均可设计出高性能的控制器;而当设计对象模型包含不稳定模态时,原 ZP/LTR 方法无法设计出可保证闭环系统稳定的控制器,而改进的 ZP/LTR 方法仍然可以求出稳定控制器。

5 结 论

本文分析了 ZP/LTR 方法的稳定性,给出并证明了其稳定性条件。同时,本文提出 ZP/LTR 方法的改进措施,并对其进行了稳定性分析,给出并证明了其稳定性条件。分析表明,改进后的 ZP/LTR 方法扩大了原方法的适用范围。

参考文献:

- [1] 孙健国. 面向 21 世纪航空动力控制展望[J]. 航空动力学报, 2001, 16(2): 97-102.
SUN Jianguo. Prospects of the aeroengine control development in the early time of the 21st century[J]. Journal of Aerospace Power, 2001, 16(2): 97-102.
- [2] Athans M. A tutorial on the LQG/LTR method[A]. Proc. of Conf. Decision and Control[C]. Athens, Greece: 1986.
- [3] Garg S. Turbofan engine control system design using the LQG/LTR methodology[R]. NASA-CR-182303, 1989.
- [4] 冯正平. 航空发动机多变量鲁棒控制[D]. 南京: 南京航空航天大学, 1999.
- [5] FENG Zhengping, SUN Jianguo, LI QiuHong. ZP/LTR control for turbofan engines[R]. The 45th ASME Gas Turbine and Aeroengine Technical Congress, Exposition and Users Symposium, 2000-GT-0043, Germany, Munich: 2000.
- [6] 冯正平, 孙健国. 航空发动机的低阶 ZP/LTR 控制[J]. 南京航空航天大学学报, 2001, 33(2): 126-129.
FENG Zhengping, SUN Jianguo. Low order ZP/LTR control for aeroengines[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2001, 33(2): 126-129.

附录

引理 1: 若 $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 为可逆

矩阵, $a = [a_0, a_1, \dots, a_n]^T$ 为 A 的特征多项式系

数,其中, $a_0 = 1$. 由 A 的特殊结构知,其特征多项式系数及 R 系数满足如下关系

$$\begin{aligned} a_i &= 0 \quad i = r + 1, \cdots, n \\ R_i &= \begin{bmatrix} R_i' \\ a_{i-1} I_{n-r} \end{bmatrix} \quad i = 2, \cdots, r \\ R_{r+1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ a_r I_{n-r} \end{bmatrix} \\ R_i &= 0 \quad i = r + 2, \cdots, n \end{aligned}$$

其中 $R_i' (i = 1, \cdots, r) \in \mathbf{R}^{r \times r}$ 为矩阵 A_1 的 R 系数.
若 $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $m \leq n - r$, $C = [C_1 \quad C_2]$, $C_1 \in$

$\mathbf{R}^{m \times r}$, $C_2 \in \mathbf{R}^{m \times (n-r)}$. 则当 $\begin{bmatrix} C_1 R_1' \\ \vdots \\ C_1 R_r' \end{bmatrix}$ 列满秩且 C_2 行

满秩时,

$$F = (C [R_1^T \quad \cdots \quad R_r^T J^T])^+ (a \otimes I_m) = \begin{bmatrix} 0 \\ C_2^+ \end{bmatrix}$$

证明:略

引理 2:若 A_g, C_g 如式(3)所示,且 A 无虚轴上极点,设 K_c 满足式(6),则对 (A_g, K_c) 而言,虚轴上极点一般可控.

证明:略

JALSP